Всероссийская студенческая физико-математическая олимпиада
имени Георгия Николаевича Шуппе
Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
8-10 апреля 2022 года

<u>Задача 1.</u> Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n\det A}{B}$, где $\det A$ – определитель матрицы n-го порядка $a_{ij}=\left|i^2-j^2\right|$, $B=\prod\limits_{k=1}^{n+2}(4k-2)$.

<u>Решение.</u>

$$\det A=\begin{vmatrix}1-1 & 4-1 & 9-1 & ... & n^2-1\\ 4-1 & 4-4 & 9-4 & ... & n^2-4\\ 9-1 & 9-4 & 9-9 & ... & n^2-9\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ n^2-1 & n^2-4 & n^2-9 & ... & n^2-n^2\end{vmatrix}.$$

Вычтем из первой строки вторую, из второй – третью, и так далее.

$$\det A=\begin{vmatrix}-3 & 3 & 3 & ... & 3 & 3\\ -5 & -5 & 5 & ... & 5 & 5\\ -7 & -7 & -7 & ... & 7 & 7\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & ... & -(2n-1) & 2n-1\\ n^2-1 & n^2-4 & n^2-9 & ... & n^2-(n-1)^2 & n^2-n^2\end{vmatrix}.$$

$$\det A=(-3)(-5)(-7)...(-(2n-1))\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & ... & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & ... & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & ... & -1 & -1\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & -1\\ n^2-1 & n^2-4 & n^2-9 & ... & n^2-(n-1)^2 & n^2-n^2\end{vmatrix}.$$

Вычтем из второй строки первую, из третьей – вторую, и так далее.

$$\det A=(-1)^{n-1}3\cdot5\cdot7...\cdot(2n-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & ... & -1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & ... & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 0\\ n^2-1 & n^2-4 & n^2-9 & ... & n^2-(n-1)^2 & 0\end{vmatrix}.$$

Раскроем определитель по последнему столбцу.

$$\det A=(-1)^{n-1}3\cdot5\cdot7\ldots\cdot(2n-1)\cdot(-1)\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}0&2&0&\ldots&0\\0&0&2&\ldots&0\\0&0&0&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&2\\n^2-1&n^2-4&n^2-9&\ldots&n^2-(n-1)^2\end{vmatrix}.$$

Раскроем определитель по первому столбцу.

$$\det A=-3\cdot5\cdot7\ldots\cdot(2n-1)(-1)^{n-1+1}\left(n^2-1\right)\begin{vmatrix}2&0&0&\ldots&0\\0&2&0&\ldots&0\\0&0&2&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&2\end{vmatrix}.$$

$$\det A=(-1)^{n-1}3\cdot5\cdot7\ldots\cdot(2n-1)\left(n^2-1\right)\cdot2^{n-2}.$$

Вычислим предел.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\det A}{B}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{n-1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots\cdot(2n-1)\left(n^2-1\right)\cdot2^{n-2}}{2\cdot6\cdot10\cdot14\cdot\ldots\cdot(4n-2)(4n+2)(4n+6)}=$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-1\right)\cdot2^{n-2}}{2^n(4n+2)(4n+6)}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-1\right)}{4(4n+2)(4n+6)}=-\frac{1}{64}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{64}$.

<u>Задача 2.</u> Решите матричное уравнение $X+AX+XA^2=A$, где $A^3=0$.

<u>Решение.</u>

Из условия задачи: $X=A-AX-XA^2$. (*)

Умножим исходное уравнение слева и справа на A^2 и раскрывая скобки, получим:

$A^2\left(X+AX+XA^2\right)A^2=A^5$.

$A^2XA^2+A^3XA^2+A^2XA^4=A^5$.

Втрое, третье слагаемые и правая часть равны нулевой матрице по условию, следовательно $A^2XA^2=0$.

Умножим исходное уравнение слева на A^2 и раскрывая скобки, получим::

$A^2\left(X+AX+XA^2\right)=A^3=0$.

$A^2X+A^3X+A^2XA^2=0$.

Откуда $A^2X=0$.

Умножим исходное уравнение справа на A^2 и раскрывая скобки, получим::

$\left(X+AX+XA^2\right)A^2=A^3=0$.

$XA^2+AXA^2+XA^4=0$.

Откуда $XA^2=0$.

Так как с учетом условия задачи и полученных «нулей»:

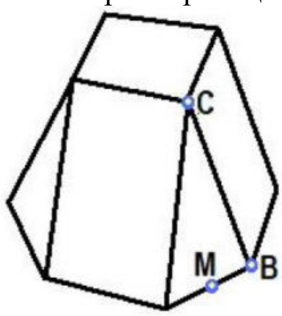
$AX=AX+A^2X+AXA^2=A\left(X+AX+XA^2\right)=A^2$, то подставляя в (*), получим:

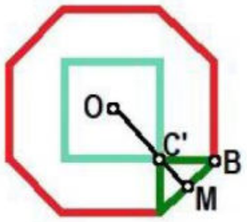
$X=A-A^2$.

Задача 3. Выпуклый 10-гранник имеет два горизонтальных основания: правильный 8-угольник со стороной 1 и квадрат со стороной 1; боковые грани – чередующиеся прямоугольники 2×1 и равнобедренные треугольники. Найти угол α между треугольной гранью и 8-угольным основанием.

Решение.

Рассмотрим проекцию на горизонтальную плоскость.





Из прямоугольного равнобедренного $\Delta BMC'$ получаем $C'M=\frac{1}{2}$, из прямоугольного ΔBMC получаем $MC=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$. Тогда искомый угол равен $\alpha=\arccos\frac{C'M}{CM}=\arccos\frac{1}{\sqrt{15}}=\arctan\sqrt{14}\approx 75^\circ$.

Задача 4. Найти 2022-ю производную функции $f(x)=e^x\sin\left(\left(2-\sqrt{3}\right)x\right)$.

Решение.

Данная функция равна мнимой части функции $g(x)=e^{\gamma x}$, где $\gamma=1+\left(2-\sqrt{3}\right)i$. Получаем $g^{(n)}(x)=\gamma^n e^{\gamma x}$.

Возведем число γ в 2022-ю степень. $|\gamma|=\sqrt{1^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

$\varphi=\arg\gamma=\arctan\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{12}$, т. к. $\tan 2\varphi=\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}=\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

Отсюда $\left|\gamma^{2022}\right|=|\gamma|^{2022}=2^{2022}\left(2-\sqrt{3}\right)^{1011}$, $\arg\left(\gamma^{2022}\right)=2022\varphi=\frac{2022\pi}{12}=168\pi+\frac{\pi}{2}$. Тогда $\gamma^{2022}=i\cdot 2^{2022}\left(2-\sqrt{3}\right)^{1011}$. Тогда $f^{(2022)}(x)=\operatorname{Im}\left\{i\cdot 2^{2022}\left(2-\sqrt{3}\right)^{1011}\exp\left(\left(1+\left(2-\sqrt{3}\right)i\right)x\right)\right\}$,

$f^{(2022)}(x)=2^{2022}\left(2-\sqrt{3}\right)^{1011}\operatorname{Re}\left\{\exp\left(\left(1+\left(2-\sqrt{3}\right)i\right)x\right)\right\}$, $f^{(2022)}(x)=2^{2022}\left(2-\sqrt{3}\right)^{1011}e^x\cos\left(\left(2-\sqrt{3}\right)x\right)$.

Задача 5. Исследовать дифференцируемость функций: а) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$; б) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^4}$ в точке $(0,0)$.

Решение.

По определению, если функция дифференцируема в точке $(0,0)$, то полное приращение в этой точке, представимо в виде $f(x,y)-f(0,0)=Ax+By+o(\rho)$,

где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $A=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$, $B=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$.

а) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$, $f(0,0)=0$,

$$A=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=1,\ B=\frac{\partial f(0,y)}{\partial y}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=1.$$

То есть, $\sqrt[3]{x^3+y^3}=x+y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Пусть $x=y>0$, тогда $\left(\sqrt[3]{2}-2\right)x=o(x)$, при $x\to 0$ – неверно.

Следовательно, функция $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ недифференцируема в точке $(0,0)$.

б) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^4}$, $f(0,0)=0$,

$$A=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=1,\ B=\frac{\partial f(0,y)}{\partial y}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

То есть, $\sqrt[3]{x^3+y^4}=x+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. при $(x,y)\to(0,0)$ – верно.

Следовательно, функция $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^4}$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

__Задача 6.__ Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}(-1)^{\left[x^2\right]}dx$, где $[y]$ – целая часть числа y.

__Решение.__

Пусть $F(t)=\int\limits_0^t(-1)^{\left[x^2\right]}dx$. Функция F имеет максимумы в точках $t=\sqrt{2k+1}$ и минимумы в точках $t=\sqrt{2k}$, $k\in N$. Между этими точками функция монотонна. Поэтому для доказательства сходимости нам достаточно доказать, что существует $\lim\limits_{m\to\infty}F\left(\sqrt{m}\right)\in R$, где $m\in N$. Поскольку $a_m=F\left(\sqrt{m+1}\right)-F\left(\sqrt{m}\right)=(-1)^m\left(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}\right)$, $F\left(\sqrt{m}\right)=\sum\limits_{k=1}^m a_k$, экстремальные значения функции F являются частичными суммами ряда, сходящегося по признаку Лейбница: знаки a_k чередуются, $a_k\to 0$, $|a_{k+1}|<|a_k|$.

__Задача 7.__ Доказать сходимость произведения и найти его.

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots$$

__Решение.__

Преобразуем бесконечное произведение к виду

$$S=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots..=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\ldots=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}-1\right)$, то сходится и бесконечное произведение.

Далее, рассмотрим последовательность $S_k=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}=\prod\limits_{n=1}^{k}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

$$\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\cdot\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^k}\cdot\sin\frac{\pi}{2^k}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}\cdot\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}}{2^2\cdot\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}=\ldots=$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{2^2}\cdot\sin\frac{\pi}{2^2}}{2^{k-1}\cdot\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^k\cdot\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}=\frac{1}{2^k\cdot\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}.$$

Тогда $S=\lim\limits_{k\to\infty}S_k=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{2^k\cdot\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}=\left|\begin{matrix}t=2^{-k}\\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}$.

<u>Задача 8.</u> Дан многочлен $P(x)$ 4-го порядка. Известно, что для всех x выполняется $P(x)\ge x^2-1$. $P(1)=0$, $P(2)=A$. $P(3)=8$, $P(4)=B$. а) Вычислить B при $A=4$. б) Пусть A может принимать случайное значение из интервала $(10;20)$. Найти вероятность того, что B будет принимать значение из интервала $(100;200)$.

<u>Решение.</u>

Рассмотрим $Q(x)=P(x)-x^2+1$ – многочлен 4-го порядка, $Q(x)\ge 0$ для всех x. Заметим, что $Q(1)=Q(3)=0$, $Q(2)=P(2)-3=1$. Следовательно, многочлен $Q(x)$ имеет вид $Q(x)=C(x-1)^2(x-3)^2$, $C>0$. С учетом $Q(2)=P(2)-3=A-3=C(2-1)^2(2-3)^2=C$, получим $Q(x)=(A-3)(x-1)^2(x-3)^2$.

$P(x)=Q(x)+x^2-1=(A-3)(x-1)^2(x-3)^2+x^2-1$.

$B=P(4)=(A-3)(4-1)^2(4-3)^2+4^2-1=9A-27+15=9A-12$.

а) $A=4$. $B=9\cdot 4-12=36-12=24$.

б) Для A из интервала $(10;20)$ B будет принимать значения из интервала $(78;168)$. Значения $B>100$ будут достигаться при $A=\frac{B+12}{9}>\frac{100+12}{9}=\frac{112}{9}$. Тогда вероятность нахождения B в интервале $(100;200)$ будет равна вероятности нахождения A в интервале $\left(\frac{112}{9};20\right)$, то есть отношению длин интервалов. Тогда $P=\frac{20-\frac{112}{9}}{20-10}=\frac{34}{45}$.

Ответ: а) $B=24$. б) $P=\frac{34}{45}$.

<u>Задача 9.</u> Железный однородный стержень длиной h одним концом прикреплен к полу шарниром без трения. Стержень подняли вертикально и отпустили. С какой скоростью v свободный конец стержня ударится о пол?

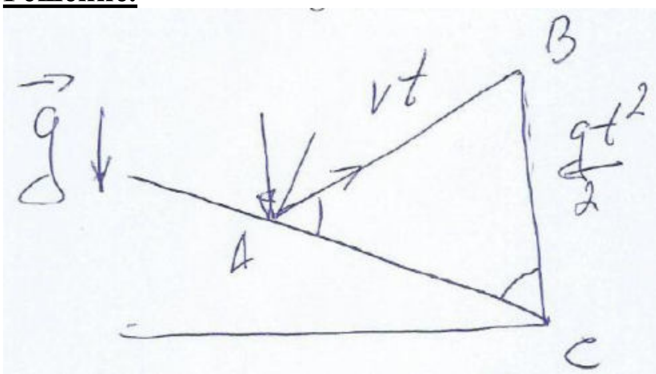
<u>Решение.</u>

Пусть τ – линейная плотность стержня. Тогда его масса $M=\tau h$. Потенциальная энергия вертикального стержня $E_p=\frac{Mgh}{2}=\frac{g\tau h^2}{2}$. Пусть падающий стержень развил угловую скорость ω.

Тогда его кинетическая энергия будет $E_k = \int_0^h \tau \frac{(\omega x)^2}{2} dx = \frac{\tau\omega^2 h^3}{6}$. Приравнивая эти энергии, получим: $\frac{g\tau h^2}{2} = \frac{\tau\omega^2 h^3}{6}$, $\omega = \sqrt{\frac{3g}{h}}$, $v = \omega h = \sqrt{3gh}$.

Задача 10. Шарик падает вертикально на наклонную плоскость со скоростью $v = 20 м/с$ и упруго отражается. Определить, через какое время (в секундах) после отражения шарик вновь упадет на наклонную плоскость. Ускорение свободного падения $g = 10 м/с^2$.

Решение.



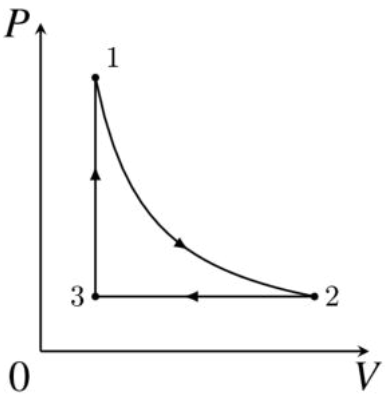
$\mathbf{r} = \mathbf{v}t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2}$. $\mathbf{AB} = \mathbf{v}t$, $\mathbf{BC} = \frac{\mathbf{g}t^2}{2}$. Заметим, что ΔABC – равнобедренный, следовательно, $AB = BC$, откуда $vt = \frac{gt^2}{2}$, $t = \frac{2v}{g} = 4с$.

Ответ: 4 с.

Задача 11. Термодинамический цикл состоит из следующих процессов: изотермического расширения 1-2, изобарического сжатия 2-3 и изохорического нагревания 3-1. В качестве рабочего тела используется газ, уравнение состояния которого неизвестно, но известно, что теплоемкости C_p и C_V постоянны во всех процессах цикла, а показатель адиабаты $\gamma = \frac{5}{4}$. Определить КПД данного цикла, если отношение максимальной и минимальной температуры газа в цикле равно 3.

Решение.

$T_1 = T_2$, так как процесс 1-2 – изотермический.



$Q_{31} = \upsilon C_V (T_3 - T_1)$. $Q_{23} = \upsilon C_p (T_2 - T_3) = -\upsilon C_p (T_3 - T_1)$. $\frac{T_1}{T_3} = \frac{T_2}{T_3} = 3$.

$\oint \frac{\delta Q}{T}=0$. $\int\limits_3^1 \frac{\upsilon C_V dT}{T}+\int\limits_1^2 \frac{\delta Q_{12}}{T}+\int\limits_2^3 \frac{\upsilon C_p dT}{T}=0$. $\upsilon C_V \int\limits_{T_3}^{T_1} \frac{dT}{T}+\frac{1}{T_1}Q_{12}-\upsilon C_p \int\limits_{T_3}^{T_1} \frac{dT}{T}=0$.

$Q_{12}=\upsilon T_1\left(C_p-C_V\right)\ln\frac{T_1}{T_3}$.

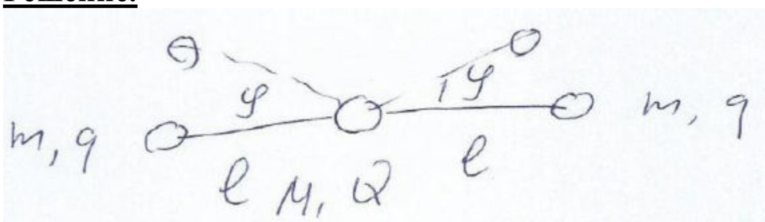
$$\eta=1-\frac{Q_{23}}{Q_{31}+Q_{12}}=1-\frac{\upsilon C_p\left(T_1-T_3\right)}{\upsilon C_V\left(T_1-T_3\right)+\upsilon T_1\left(C_p-C_V\right)\ln\frac{T_1}{T_3}}=1-\frac{\gamma\left(\frac{T_1}{T_3}-1\right)}{\left(\frac{T_1}{T_3}-1\right)+\frac{T_1}{T_3}\left(\gamma-1\right)\ln\frac{T_1}{T_3}}.$$

$\eta=0.115=11.5\%$.

Ответ: $\eta=0.115=11.5\%$.

Задача 12. Система состоит из двух небольших одинаково заряженных тел с массами m и тела массой $M>>m$ с зарядом Q, соединенных нерастяжимыми невесомыми непроводящими нитями длиной l. В состоянии равновесия потенциальная энергия взаимодействия заряженных тел равна нулю. Определить период малых колебаний системы.

Решение.



В положении равновесия энергия электрического взаимодействия равна 0.

$k\frac{q^2}{2l}+2k\frac{qQ}{l}=0$. Отсюда $q=-4Q$, $|q|=|-4Q|$.

Из закона сохранения энергии:

$2\frac{mv^2}{2}+k\frac{q^2}{2l\cos\varphi}+2k\frac{qQ}{l}=const$.

$v=l\dot{\varphi}$. $ml^2\dot{\varphi}^2+\frac{8kQ^2}{l}\frac{1}{\cos\varphi}=const$. $ml^2\dot{\varphi}^2+\frac{4kQ^2}{l}\varphi^2=const$. Тогда $\omega_0^2=\frac{4kQ^2}{ml_3}$. $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{ml^3}{4kQ^2}}$.

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\frac{ml^3}{4kQ^2}}$.